



Matematisering i lek på vetenskaplig grund

Camilla Björklund^{1*} og Hanna Palmér²

¹Göteborg universitet, Sverige

²Linnéuniversitetet, Sverige

*Korrespondanse: Camilla Björklund, e-post: camilla.bjorklund@ped.gu.se

Abstrakt

I den här artikeln riktar vi uppmärksamhet mot uttrycket *matematisera*, myntat av matematikdidaktikern Hans Freudenthal och ofta använt i beskrivningar av förskolebarns matematiklärande. I artikeln problematiseras Freudenthals matematikdidaktiska ansats med fokus på hur matematisera framträder i undervisning där lek har en central roll. Mer explicit studeras hur form och innehåll i tre lekaktiviteter (94 videoinspelade observationer) tillsammans med barns och förskollärares ageranden möjliggör matematiserande utan att lekens ursprungliga värden förringas utan snarare vidgas eller fördjupas. Resultaten visar att undervisning som möjliggör matematiserande är en didaktisk utmaning där barns agency i lekaktiviteten, deras kunskaper om lekens struktur samt deras tidigare matematikkunskaper framstår som kritiskt. Pedagogiska implikationer är vikten av barns frihet att ta initiativ till att undersöka och använda matematik som är relevant för leken samt hur förskollärares aktiva deltagande i leken främjar barnens agency.

Nyckelord: förskola; lek; matematisera; undervisning

Abstract

Mathematising in play on a scientific basis

In this article, we aim to direct attention to the notion 'mathematising', drawing on Freudenthal. The notion has often been used in descriptions of mathematics education in the early years. In the article we problematise Freudenthal's approach and focus on how mathematising appears in education where play is a central feature. More explicitly, form and content in three play activities (94 video-recordings) are analysed in terms of how children's and teachers' interaction allows mathematising to be realised, without the original intentions with the play activity being broken or disturbed, but rather expanded and deepened. The results show that it is a challenge to integrate mathematising in play, where children's agency, knowledge of the structure of the activity and initial mathematical ideas are critical. Pedagogical implications are the significance of children's freedom to take initiatives to explore and make use of mathematics that is a relevant and useful part of play and the active participation of the preschool teacher in affording the child agency.

Keywords: early childhood education; mathematising; play; teaching

Gjesteredaktører: Tamsin Meaney, Elin K. L. Reikerås og Camilla N. Justnes

Inledning

För över 40 år sedan identifierade Hans Freudenthal, en av våra mest betydelsefulla matematikdidaktiker genom tiderna, flertalet utmaningar i matematikdidaktisk forskning och undervisning där en av utmaningarna uttrycktes ”How to create suitable contexts in order to teach mathematising” (Freudenthal, 1981, s. 145). Även om läroplaner, matematikdidaktisk forskning, utbildningsformer liksom utbildning av lärare och förskollärare förändrats avsevärt under dessa 40 år är utmaningen lika aktuell idag. Utmaningen bottnar alltså i hur matematik görs relevant och användbar inte bara utifrån ett läroplans- och utbildningsperspektiv utan också för den lärande.

Förskolläraren: ”Kan du räkna hur många?”

Barn: ”Ja, men nu ska jag ta de här rosa knapparna.”

Exemplet ovan är i linje med Freudenthals utmaning och något vi ofta har observerat: Det är fullt möjligt att lyfta in matematik som ett innehåll i vilken situation som helst, men det betyder inte att det är meningsfullt *för barnen* att resonera matematiskt i alla situationer. I den här artikeln riktas blicken mot matematik som ett *meningsfullt* innehåll för yngre barns lärande i förskolan. Särskilt vill vi rikta blicken mot uttrycket *matematisera* som har blivit vanligt i relation till förskolans matematik.

Freudenthal (1981) betonade ”first the real world and then mathematising” och förtydligade att ”the real world” avsåg en kontext som inkluderar ett matematiskt problem som är relevant för den eller dem som ska lära. När Freudenthal lyfte kontexten som en didaktisk utmaning gjordes inte det i relation till yngre barn utan i relation till matematikutbildning generellt. Utgångspunkten var att matematik bör undervisas så att kunskapen blir meningsfull för den lärande varför all undervisning i matematik bör ta avstamp i den lärandes omvärld och erfarenheter (Freudenthal, 1968). Vi menar att uttrycket matematisera kan spela en viktig roll i förskolans matematikundervisning men att uttrycket behöver problematiseras, dels utifrån ett teoretiskt perspektiv vad det innebär att matematisera, dels i ett empiriskt perspektiv hur matematiserande kan ta sig uttryck.

Enligt den svenska läroplanen för förskolans utbildning¹ ska lek ha en central roll och i utbildningen ska det ingå undervisning (Skolverket, 2018). I tidigare studier (bl.a. Björklund et al., 2018; Björklund & Palmér, 2019) har relationen mellan undervisningens målorientering och lekens öppenhet samt hur matematik kan bli meningsfullt för barnen och för den lek som barnen engagerar sig i problematiserats. Studierna visar att det kan

1 Förskola är i Sverige en frivillig pedagogisk verksamhet för barn 1–5 år gamla, där ca 85 % av barnen i denna åldersgrupp deltar. Förskolan har sedan 1998 en egen läroplan.

vara svårt att som förskollärare bli delaktig i barns lek och att i leken undervisa ett innehåll som bidrar till att leken utvecklas genom att barnen erbjuds nya erfarenheter och färdigheter inom lekens ramar. Alltför ofta blir matematiken påklistrad (som i exemplet ovan) vilket i värsta fall leder till att barn får en felaktig bild av matematik som något som inte har med deras livsvärld och intressen att göra (Freudenthal, 1981).

I ett praktisknära forskningsprojekt har vi tillsammans med förskollärare studerat hur matematikundervisning med fokus på tal kan utformas på vetenskaplig grund. Syftet är att utveckla matematikundervisning i förskolan där barns perspektiv utgör såväl utgångspunkt som slutpunkt där målet med undervisningen är att barns perspektiv breddas och fördjupas (Sommer et al., 2010). I denna artikel kommer vi analysera empiriska exempel från denna studie för att problematisera Freudenthals matematikdidaktiska ansats med fokus på uttrycket *matematisera* och därmed även lekens centrala roll i förskolans utbildning. Mer explicit studeras hur form och innehåll i lekaktiviteter tillsammans med barns och förskollärares ageranden möjliggör *matematiserande* utan att lekens ursprungliga värden förringas utan snarare vidgas och fördjupas.

Lek och lärande i förskolan

Det finns många sätt att beskriva vad lek är och det råder ingen egentlig konsensus om hur lek ska eller bör definieras. Vissa menar att lek är all verksamhet som barn engagerar sig i medan andra avgränsar lek till rolltagande. Oavsett hur lek förstås eller förklaras präglas lek av en öppenhet och ett personligt engagemang hos den som leker där riktningen inte är förutbestämd, även om det alltid finns ett innehåll (något man leker) (Pramling et al., 2019). Hur leken utformar sig, det vill säga vilken riktning leken tar, omförhandlas ständigt av lekdeltagarna vilket inkluderar inslag av makt och tolkningsföreträde. Olika sätt att förstå och förklara lekens betydelse för barns lärande och utveckling får konsekvenser för hur vuxnas roll i barns lek kan tolkas, vilket sannolikt är en orsak till att leken länge setts som skild från undervisning och tillhörande barnen, fri från vuxnas inblandning. Enligt Van Oers (2014) kan lek, istället för att ses som en aktivitet fri från vuxna, ses som en aktivitet där barn är fria att utforska där leken kan ta oförutsägbara riktningar. Detta synsätt innebär att lek inte utesluter vuxnas deltagande men att det kan finnas en spänning mellan lekens frihet och oförutsägbara riktningar och förskolans målorienterade verksamhet.

I svenska förskolans läroplan skrivs att ”lek ska ha en central plats i utbildningen” (Skolverket, 2018, s. 4) och att barn ska få möjlighet ”att bredda sina lekmönster” (Skolverket, 2018, s. 7), samt att detta ska ske både i barnets egeninitierade lek och i lekaktiviteter initierade av andra såsom förskolläraren. Att vidga barns lekmönster genom planerade lekaktiviteter är därmed ett sätt att genomföra undervisning i förskolan som följer den svenska

läroplanens målsättning. Att skrivningarna finns i läroplanen betyder dock inte att det är självklart på vilket sätt lek kan få en central plats i utbildningen. Att barn erbjuds delta i olika lekaktiviteter där varierande innehåll och former erbjuds är en förutsättning, men deltagandet i sig är inte en garanti för att lekmönster kan breddas. För detta krävs en mål-orientering i syfte att göra det möjligt för barn att bredda sina lekmönster genom att till-ägna sig fler redskap och fördjupade kunskaper, vilket kan göra det möjligt att följa andras riktning i lek eller initiera nya vägar och ramar för lek. Ett sätt att tolka målorientering är därmed att vuxna kan bidra till barns lek genom att skapa möjligheter för barnen att använda redskap och kunskaper som dels behövs för att delta i en viss lek, dels öppnar för att initiera nya riktningar i leken.

Att barn breddar sin repertoar av lekmönster kan beskrivas i termer av *agency* i betydelsen att barn har agens att ta initiativ i sin lek och samvaro med andra, vilket är en central del i en barncentrerad verksamhet som förskolan (Pramling Samuelsson & Asplund Carlsson, 2008). Att se och beskriva barns lärande i termer av *agency* medför att barn ses som aktiva kunskapsbildare snarare än passiva mottagare (James, 2009). *Agency* innebär å ena sidan självständighet att ta initiativ i samspel med andra, å andra sidan är självständigheten situerad i betydelsen att olika situationer möjliggör eller hindrar barn att ta initiativ och kontroll över vad som sker. I vilken utsträckning barns *agency* utvecklas relaterar därmed till hur andra deltagare responderar på barns initiativ. *Agency* innebär även att barn uppfattar hur andra kan vara stöd för att barnet ska uppfylla sina intentioner (Lipponen & Kumpulainen, 2011). *Agency* är dock inte medfött utan utvecklas i interaktion med omgivningen i en ömsesidig process (Vygotsky, 1978). I en studie av barns *agency* i förskolekontext (Sairanen et al., 2020) observeras flera sätt för barn att initiera förslag och riktningar i aktiviteter de deltar i. Vanligt är att barn ställer frågor, föreslår förändringar både gällande att byta aktivitet och att byta riktning inom en aktivitet, men också genom att hävda sina idéer eller välja att inte delta. *Agency* förknippas gärna med lek och samspel men är betydelsefullt för allt lärande i och med att idéer, kunskaper och färdigheter behöver prövas, utmanas och kontextualiseras för att bli meningsfullt och användbart. Sairanen et al.'s (2020) studie visar att barns *agency* ständigt formas och förhandlas i interaktion med andra och att detta sker både i barns spontana lek och i tillrättalagda aktiviteter. Därmed är barns *agency* av betydelse även i undervisningssammanhang, särskilt när den lärandes perspektiv ses som utgångspunkt och mål.

Att se världen i ljuset av matematik

Freudenthal (1968) beskriver matematiklärande som att barn lär sig *se världen i ljuset av matematik*. Det innebär att barn i mötet med en uppgift, oavsett självinitierad eller given, identifierar att matematik kan bidra till att lösa uppgiften på önskat sätt.

Om barnet möter en uppgift där klossar i geometriska former ska passas in i motsvarande geometriskt formade hål underlättas aktiviteten om barnet urskiljer klossarnas spatiala egenskaper. För att lösa uppgiften behöver barnet inte benämna egenskaperna utan enbart fokusera på hur klossarnas egenskaper samspelar med hålens egenskaper – matematiken blir på så sätt nödvändig i aktiviteten. Att i situationen fråga barnet efter benämningen på klossarna innebär dock inte att se världen i ljuset av matematik i den mening Freudenthal beskriver eftersom klossarnas benämningar inte är nödvändiga för att genomföra aktiviteten. Att hitta strukturer, klassificera, systematiskt pröva och symbolisera är andra exempel på sätt att se världen i ljuset av matematik som även yngre barn engagerar sig i, vilka utgör en förutsättning för fortsatt begrepps- och färdighetsutveckling (Gravemeijer & Terwel, 2000).

Matematik kan enligt Freudenthal (1991) beskrivas som grundat i både form och innehåll. Å ena sidan kan barn lära sig utföra matematiska procedurer (t.ex. säga ett räkneord för varje föremål som ska räknas) och de kan memorera fakta (t.ex. ”fem och fem är tio”). Å andra sidan är sådana färdigheter och förmågor i sig av litet värde om barnet inte förstår syftet med proceduren eller memorerade fakta, eller hur och varför en procedur fungerar eller ett påstående är sant. Freudenthal skriver att matematik inte bör undervisas som isolerad form eller som isolerat innehåll, utan alltid med hänsyn till det samspel som finns mellan form och innehåll. Ett exempel är räkneramsan som i grunden är form, men för att användas i syftet att ta reda på antal behövs en avgränsad mängd objekt att räkna (ett innehåll). Abstraherad från det specifika innehållet har räkneramsan därefter kvar sin innebörd att dess syfte är att bestämma antal av objekt (som kan vara av olika slag). Den fördjupade innebörden är fortfarande starkt knuten till formen (räkneordens stabila ordning) och att det är ett avgränsat antal objekt (ett innehåll) som räknas (Freudenthal, 1991). På liknande sätt visar studier från svensk förskola att undervisning som är målorienterad samtidigt som lekens frihet beaktas förutsätter att barnen först ges möjlighet att urskilja lekens form i betydelsen lekens regler och struktur. Därefter blir det möjligt för dem att i lek även urskilja matematikinnehållets form och innehåll (Palmér & Björklund, 2019). På så vis kan både matematik och lek förstås utifrån form och innehåll och därmed ses som likvärdiga för barnen.

Form och innehåll kopplas enligt Freudenthal (1991) även till att den kontext som inkluderar det matematiska problemet är meningsfull. Här skiljer Freudenthal på *horisontell* och *vertikal matematisering* (horizontal and vertical mathematizing). Horisontell matematisering börjar enligt Freudenthal i ”real world” i betydelsen den lärandes omvärld och erfarenheter, därefter följer matematisering där barnet löser en uppgift med tillgängliga matematiska verktyg. Vertikal matematisering går i motsatt riktning i betydelsen att aktiviteten börjar i ett matematiskt objekt eller en matematisk process som utforskas, skapas, omformas och manipuleras för att på så sätt bli begripligt och användbart för problemlösning såväl inom-matematiskt som i vardagen. Att ta utgångspunkt i lek och möjliggöra

för barn att urskilja matematisk form och innehåll skulle därmed i Freudenthals beskrivningar innebära horisontell matematisering medan utgångspunkt i ett matematikinnehåll, till exempel ett resonemang om talföljd (vad kommer efter ett och två?) för att därefter använda denna erfarenhet i lek innebär vertikal matematisering, båda har alltså betydelse för att utveckla matematikfärdigheter och kunnande som är relevanta för barnet. Freudenthal poängterar dock att "real world" ser olika ut för olika individer, till exempel är matematiska objekt del av "real world" för matematiker på ett annat sätt än de är för noviser. Då uppstår även en didaktisk utmaning – vad är meningsfull matematik och hur ska det undervisas så att den blir relevant och användbar för den som ska lära (Freudenthal, 1968).

Frågan om vad som är meningsfull matematik leder enligt Freudenthal (1978) till frågan om vad undervisningen i matematik bör behandla. Ett sätt att besvara frågan är att utgå från läroplanens målformuleringar men Freudenthal hävdar att en risk då är att mål omsätts i undervisning som isolerade kunskapsöar, vilket även fråntar läraren dennes professionella uppdrag. Tacksamt nog innehåller svenska förskolans läroplan inte detaljerade mål av slaget "kunna räkna till 100". Sådana målformuleringar länkar enligt Freudenthal inte samman matematik med "real world" utan är snarare en didaktisk absurditet. I många matematikuppgifter eller undervisningsaktiviteter för yngre barn vävs matematik in i vardagliga eller bekanta sammanhang i syfte att göra undervisningen meningsfull och engagerande för dem som ska lära sig matematiken ifråga, till exempel "Pettson och Findus har tio päron tillsammans. Pettson har tre päron fler än Findus. Hur många päron har Findus?" Freudenthal ställde sig dock kritisk även till den typen av uppgifter i matematikundervisning eftersom barnen först måste förstå matematiken för att kunna lösa uppgiften. Uppgiften i sig ger inte stöd att *utveckla* matematikkunnande utan löses oftast genom gissning, eller rekonstruktion av uppgiften med laborativa materiel, vilket nödvändigtvis inte visar de matematiska strukturer som krävs för att en liknande strategi ska kunna tillämpas i ett annat sammanhang. Freudenthals kritik leder därmed till att andra typer av problemlösning behöver göras till objekt för undervisning där barnet ges möjlighet att upptäcka samband och strukturer som nödvändiga för att lösa ett problem (då blir matematiken ifråga relevant och användbar).

Att uttrycka matematik som meningsfullt är dock inte oproblematiskt då *meningsfullt* kan förstås på flera sätt, till exempel som Leontiev (1978) beskriver: som en kulturell mening som förmedlas av mer kunniga genom hur artefakter används för olika mål och sammanhang, men också som en personlig mening grundad i den lärandes erfarenheter, föreställningar och intresse. I utbildningssammanhang innebär meningsfullt lärande då att både den kulturella och den personliga meningen framträder i handling där innebörden gör sammanhanget mer begripligt som helhet. En betydelsefull fråga är alltså hur barnets personliga uttryck och handlingar närmar sig en kulturellt medierad matematisk mening. Enligt Van Oers (2010) sker detta genom att barn deltar i aktiviteter och utför

handlingar som responderas på genom vuxnas kulturellt färgade tolkningar. Här blir symboliska representationer en bidragande artefakt till att matematiska innebörder förhandlas och omförhandlas. På så sätt närmar sig barnets individuella mening den kulturella och handlingarna kan få karaktären av den kulturella matematiska meningen. I leken har barnen stor frihet att sätta ramar och välja riktning, vilket skulle borga för att barn ges rum att uttrycka sin förståelse och sina handlingar där lärarens uppgift är att respondera med den kulturellt förmedlade innebörden. Det har också visat sig att barn som deltar i lekbaserad undervisning som bygger på dessa principer utvecklar räknefärdigheter som de förmår att tillämpa i nya sammanhang, det vill säga relevanta och användbara färdigheter (Van Oers, 2003).

Studiens ramar och genomförande

Det empiriska materialet i denna studie kommer från ett praktikinära forskningsprojekt där två forskare och tre förskollärare samarbetat under två år med att utveckla matematikundervisning för förskolans yngsta barn (1–3-åringar). Centralt har varit att ta avstamp i den verksamhet som barnen deltar i och de aktiviteter som barnen visar intresse för. I denna verksamhet är leken central där förskollärare förväntas delta i barns lek som en av flera former för undervisning i enlighet med såväl policy för förskoleverksamhet som förskolepedagogisk forskning (Pramling et al., 2019).

I studier där lek är en central del kan två dimensioner av lek urskiljas: dels som aktivitet med tydliga ramar inom vilka barnen har frihet att göra val, vilket kan kallas regellek, dels som rollekar där barnen går ut och in i roller och växlar mellan att låtsas ”som om” något är på ett visst sätt och ”som är”, det vill säga så som det upplevs vara (jämför en byggekloss som ett barn leker med ”som om det var en häst” och i nästa stund använder samma kloss till att bygga ett stall, klossen ”som är” ett byggelement). I denna studie avgränsas lekaktiviteter till att främst omfatta den förra, det vill säga planerade aktiviteter där det finns regler för vad som är förväntade handlingar (för att leken ska fortgå) men ramarna som kontextualiserar aktiviteten är öppna och förhandlingsbara och kan därför inkludera också den senare dimensionen av lek där deltagarna tar olika roller och växlar mellan att gå in i och ur leken.

I projektet observerades initialt de deltagande barnens initiativ och intressen i förskoleverksamheten. Utifrån observationerna utvecklades lekaktiviteter i nära samarbete mellan forskarna och förskollärarna i syfte att dessa aktiviteter även skulle möjliggöra lärande av tal. Med stöd av variationsteoretiska principer (Marton, 2015) har undervisningen utformats så att den ska ge barnen bästa möjligheter att erfara tals innebörd och mening (se beskrivning av aktiviteterna nedan). Olika representationsformer som ingår i lekaktiviteternas utformning bidrar till att innebörden av tal, och särskilt tals

kardinalitet, görs möjlig att urskilja (se även Duval, 2006, samt Lesh, 1981). Aktiviteterna har utvecklats, prövats och utvärderats i en iterativ process i tre förskolor med 27 barn i åldrarna 1–3 år. I det empiriska arbetet där aktiviteterna prövats har principer för undervisningen förfinats och vidareutvecklats. Tre av dessa aktiviteter har särskilt analyserats i denna artikel. Aktiviteterna är valda för att de utformats på vetenskaplig grund och med ett uttalat didaktiskt syfte – att i lek undervisa om tals innebörder. Aktiviteterna har likheter i både form och innehåll. De är rörelselekar med förbestämda ramar för hur leken går till, det vill säga vilka moment som ingår i leken och vad deltagarna förväntas göra. Inom lekens ramar använder förskollärarna olika representationer (t.ex. verbala uttryck, fingermönster och andra artefakter) i interaktionen med barnen för att synliggöra avgränsning av föremål i grupper med olika antal. Därtill gör förskollärarna avsiktliga kopplingar mellan representationer genom att benämna och visa vad som utgör en avgränsad mängd eller vad som räknas. Planeringen av aktiviteterna kan därmed kopplas till Freudenthals horisontell matematisering i betydelsen att utgångspunkten är lekens form och innehåll.

Hoppasången tar avstamp i barnens intresse för en speciell sång som handlar om att hoppa ("Klaras hoppsång" av Andeby och Wanngren, 1994). Lekens innehåll utgörs av rörelserna till musiken och formen är sången som består av upprepningen "hoppa, hoppa, hoppa, jag vill bara hoppa" följt av rimord och fraser som indikerar hur roligt det är att hoppa. Rörelserna till sången har i den utvecklade aktiviteten preciserats så att deltagarna ska hoppa "på ett", "två", "tre" eller "fyra" kroppsdelar mot golvet i takt till musiken. Antalet fötter och händer man ska hoppa med mot golvet varierar så att det uppstår en kontrast (t.ex. mellan två-fyra eller ett-tre), som förskolläraren uppmärksammar barnen på. Aktiviteten är på så sätt teoretiskt grundad i variationsteoretiska antaganden (Marton, 2015) om att kontrasten *mellan* olika antal som uttrycks på liknande sätt (hoppa med fötter och händer mot golvet) gör det möjligt att urskilja kardinalitet hos tal, samtidigt som antalen (matematikens form) knyts samman med den konkreta upplevelsen av kroppsdelar att hoppa med mot golvet (matematikens innehåll).

Rockringar är en utveckling av Hoppasången där musik spelas och barnen dansar eller rör sig fritt i rummet. När musiken stannar ska deltagarna söka upp en rockring på golvet och sätta sig på en sittplatta. Sittplattornas antal varierar i ringarna mellan en till fyra plattor. Rockringarnas syfte är att "ringa in" en avgränsad mängd sittplattor så att kontrasten mellan antalet sittplattor och därmed antalet barn inom varje ring blir urskiljbar (se bild 1), enligt liknande principer som i *Hoppasången*. Genom den samtidiga koppling som görs mellan antalet synligt avgränsade sittplattor samt antal barn som sitter ett-till-ett på varje platta (innehåll) och uppräknningen för att bestämma och jämföra antal (form) öppnas möjligheten att erfara hur tal används i ett relevant sammanhang och med ett syfte av betydelse för leken.

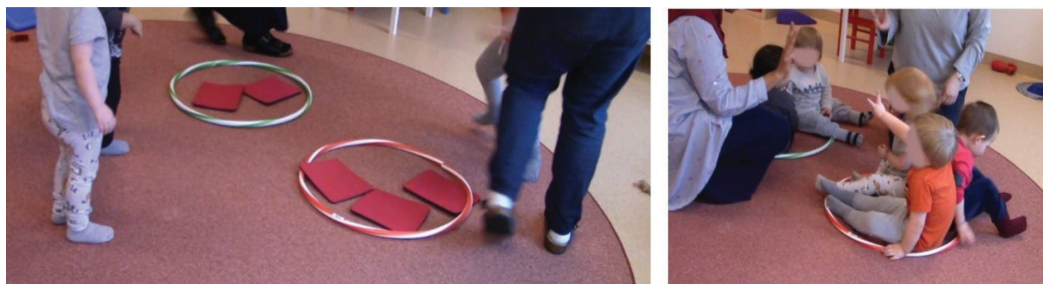


Bild 1. Rockringarna "ringar in" olika antal sittplattor.

Stenrock är en sammanslagning och utveckling av de båda tidigare lekaktiviteterna. Leken inleds med att barnen bestämmer ett antal "stenar" (utklippta former som läggs ut i grupper om 1–4 på golvet) som de senare ska stå på (motsvarande antal fötter eller händer på stenarna, se bild 2). Deltagarna rör sig därefter i rummet till musik. Vid en given signal ska deltagarna söka upp en samling stenar och stå på dem med en hand eller fot på varje sten. Leken tar samma teoretiska utgångspunkt för hur kardinalitet görs möjlig att urskilja genom kontrast i antal, men är särskilt knuten till det kroppsliga erfandet som en representationsform. Kopplingen mellan innehållet uttryckt i "stenar" samt kroppsdelar och det tal (form) som representerar antalet hopparade stenar och kroppsdelar pekas särskilt ut av förskolläraren för att jämföra och på så vis synliggöra likheter och skillnader i antal.



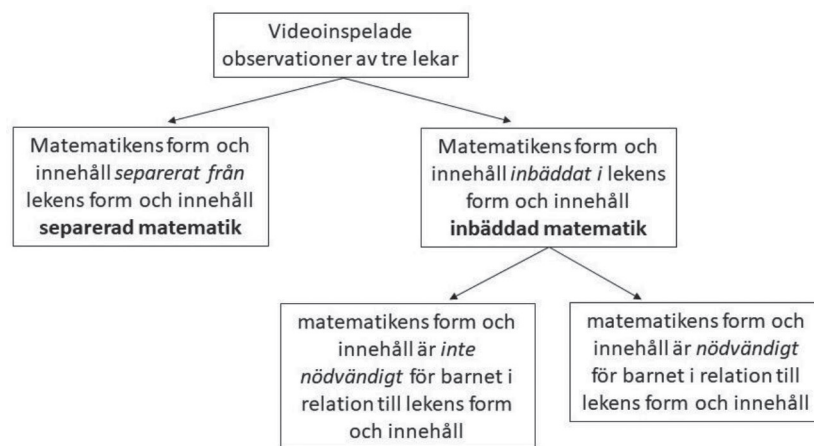
Bild 2. En kroppsdel på varje "sten".

Metod för analys

Empirin i studien utgörs av 94 videoinspelade observationer av dessa tre lekaktiviteter från de tre förskolorna i projektet. Vårdnadshavarna till alla deltagande barn har godkänt vilka data som samlas in, i vilket syfte och hur data hanteras enligt Vetenskapsrådets forsknings-etiska principer (2017) och gett sitt skriftliga samtycke.²

2 Etikprövningsmyndigheten har inget att anmärka på projektet, sett från etisk synpunkt (Dnr 2019-01037).

I analysen gjordes ingen jämförelse mellan lekaktiviteterna utan de ses som en samling observationer som kan möjliggöra matematisering. Inledningsvis transkriberades observationerna och analyserades deduktivt utifrån Freudenthals beskrivning av *matematisering* med avseende på hur lekens och matematikens form och innehåll framträder i relation till varandra, vilket gav två kategorier varav en med underkategorier (se Figur 1). Denna analys bygger därmed på förskolläraernas och barnens ageranden i aktiviteten och inte på aktivitetens planerade syfte och genomförande varför samma aktivitet återfinns i samtliga kategorier. Vi vill poängtera att analysen inte avser att värdera de empiriska exemplen som mer eller mindre goda exempel på matematikundervisning och inte heller att värdera huruvida barnens möjligheter att erfara matematik är större eller mindre i olika genomföranden. Analysen omfattar enbart huruvida de empiriska exemplen kan förstås som matematiserande eller inte.



Figur 1. Deduktivt kategoriseringsschema.

Även om samtliga aktiviteter är planerade för att matematikens form och innehåll ska vara del i lekens form och innehåll blir inte detta alltid utfallet när aktiviteterna implementeras. Kategorin **separerad matematik** framträder i empiriska exempel där det i aktiviteten utifrån deltagarnas ageranden sker en tydlig uppdelning mellan matematik och lek. Här är matematikens form och innehåll separerat från lekens form och innehåll varför exemplen inte kan benämnas *horisontell matematisering*.

I kategorierna **inbäddad matematik** framträder empiriska exempel där aktiviteten tar utgångspunkt i lek och där matematik utifrån deltagarnas ageranden utgör en del av leken, i Freudenthals benämning *horisontell matematisering*. I dessa exempel är matematikens form och innehåll inbäddat i lekens form och innehåll. I en noggrannare analys blev det dock tydligt att dessa aktiviteter inte per automatik innebar att matematiken är *nödvändig* för den eller dem som ska lära. Därmed delades observationerna i kategorin in i två delkategorier. I båda är matematikens form och innehåll inbäddat i lekens form och innehåll men enbart i den ena är matematiken nödvändig för barnet i relation till

lekens form och innehåll, det vill säga nödvändig för att barnets intention i leken ska kunna uppfyllas.

I nästa steg analyserades exemplen i de två kategorierna med underkategorier utifrån vad som triggar *matematiserande* i betydelsen att barn erfar tal som nödvändiga att använda på ett eller annat sätt för att delta i leken, utan att lekens ursprungliga värden förringas utan snarare vidgas eller fördjupas.

Resultat

Nedan ges inledningsvis empiriska exempel på de två kategorierna *separerad matematik* och *inbäddad matematik* där den senare är uppdelad i underkategorierna *icke-nödvändig* respektive *nödvändig* matematik. Därefter följer en fördjupad analys med fokus på vad som tycks möjliggöra matematiserande.

Delresultat 1: Olika sätt att hantera matematikinnehållet

Separerad matematik

Karaktistiskt här är att matematikens form och innehåll är separerade från lekens form och innehåll, matematik och lek och utgör parallella aktiviteter. Att matematiken separeras från leken framträder särskilt när en aktivitet är ny och lekens olika moment och ramar introduceras för barnen. I excerpt 1 nedan ska en förskollärare och fyra barn leka *Rockringar* för första gången. Förskolläraren berättar inledningsvis att de ska leka en ny lek, att barnen ska dansa när det spelas musik och att de när musiken tystnar ska sätta sig på en sittplatta. Förskolläraren lägger ut tre rockringar på golvet.

Excerpt 1

Förskollärare Vi lägger de här då, en, två och så tre. Och så ska vi ha de här. *Håller fram sittplattorna.* Dom ska man sitta på. Vi har en där. *Lägger en sittplatta i en rockring.* Och så lägger vi en där. *Lägger en sittplatta i en annan rockring.* Och så lägger vi en, två, två där. *Lägger två sittplattor i den tredje rockringen.* Gör en cirklande rörelse med handen över de två sittplattorna. Och nu när musiken spelar kan vi sjunga och dansa. Och sen när musiken stannar då får man sätta sig på en sådan här matta. *Två av barnen sätter sig på varsin matta.* Då dansar vi lite till.

Förskolläraren upprepar att de ska dansa men får ta barnen i händerna och dansa tillsammans med dem för att de ska ställa sig upp. När musiken tystnar slutar dansen men barnen

sätter sig inte på någon sittplatta. Förskolläraren lotsar dem då till varsin sittplatta. Hon frågar dem hur många barn som sitter i varje rockring och de räknar tillsammans. Därefter hjälper förskolläraren barnen att ställa sig upp och startar musiken igen.

Eftersom detta är första gången barnen leker Rockringar är lekens struktur inte känd för dem. För att leka leken behöver barnen urskilja lekens form och innehåll. I excerpt 1 är matematikens form och innehåll (räkna antalet rockringar och sittplattor) separerad från lekens form och innehåll (lekens regler och mening) som barnen ännu inte har urskilt. Att ta reda på antalet rockringar eller sittplattor fyller för barnen ännu ingen funktion i relation till lekens struktur att hitta en plats i en rockring när musiken tystnar. Därmed blir matematiken separerad från lekens form och innehåll och inte heller nödvändig för att delta i leken eftersom det går att dansa och ta plats i en rockring utan att ta antal i beaktande.

Även när en lek leks vid flera tillfällen förekommer att matematikens form och innehåll separeras från lekens form och innehåll. Barnen i excerpt 2 har lekt Rockringar flera gånger och förskolläraren inleder med att påminna dem om att de ska dansa när det är musik och att när musiken tystnar ska de sätta sig på en sittplatta. Hon tar därefter fram två rockringar och placerar en sittplatta i den ena rockringen.

Excerpt 2

Förskollärare Hur många sittplattor är det i den ringen?

Barn En

Förskollärare Ja, en. *Förskolläraren lägger tre sittplattor i den andra rockringen.* Hur många sittplattor är det i den ringen?

Barn Fyra

Förskollärare *Håller fram fyra fingrar.* En, två, tre. *Pekräknar och viker ner ett finger för varje sittplatta.* Titta, det blev ett finger över. Det var tre.

Musiken startar och barnen springer runt/dansar. När musiken tystnar sätter sig två barn direkt på var sin sittplatta. Förskolläraren hjälper de andra två att sätta sig på två andra sittplattor.

Förskollärare Då ska vi räkna. Hur många barn är det i den här ringen?

Barn En

Förskollärare Ja, ett barn. Hur många barn är det i den ringen?

Barn Tre

Förskollärare Ja. En, två, tre. Tre barn.

Förskolläraren samlar in sittplattorna och lägger ut dem på ett nytt sätt och frågar barnen hur många sittplattor som ligger i varje ring.

I excerpt 2 finns det utifrån förskollärarens och barnens ageranden ingen självklar koppling mellan dansen och räknandet i rockringarna där aktiviteten utförs på ett sätt där barnen först deltar i dansandet och sedan i räknandet men räknandet får ingen tydlig roll i leken. Något behov av att veta antalet barn i rockringarna för att delta i leken,

vilket kunnat göra leken till en sammansatt helhet, framställs inte av förskolläraren eller barnen.

Gemensamt för observationerna i kategorin separerad matematik är att matematikens form och innehåll separeras från lekens innehåll och därmed även från lekens form. Denna separation medför att leken inte utgör en kontext som inkluderar ett matematiskt problem (i betydelsen ”real world”) utan det matematiska problemet separeras från leken. Så länge matematikens form och innehåll separeras från lekens form och innehåll kan exemplen utifrån Freudenthal (1991) inte beskrivas som *matematisera*. Det betyder inte att barnen inte ges möjlighet att lära matematik eller att de inte kan uppfatta matematikinnehållet som meningsfullt, men aktiviteten möjliggör inte *matematiserande* i betydelsen att barn erfar aspekter av tal som är *nödvändiga* för att delta i och utveckla leken.

Inbäddad matematik där matematiken inte är nödvändig

Till skillnad från när matematiken separeras från leken observerar vi också att matematikens form och innehåll bäddas in i lekens innehåll och därmed även i lekens form. Matematiken blir på så sätt en integrerad del i leken. I excerpt 3 berättar en förskollärare för tre barn att de ska hoppa till musik i *Hoppasången* och bäddar in antal att hoppa på som en del av vad leken går ut på (lekens form och innehåll).

Excerpt 3

Förskollärare Nu ska vi upp och hoppa. *Ställer sig upp. Barnen följer efter och ställer sig upp.* Nu ska vi hoppa på två ben. *Håller upp två fingrar.* Hur hoppar man på två då? Hur hoppar man då? *Förskolläraren räknar högt en, två, två ben och lägger samtidigt en hand i taget på sina ben. Sedan går hon runt och gör samma sak på ett barn i taget. Varje gång säger hon en, två, två ben. Ett barn sätter en hand på varje ben innan förskolläraren kommer och räknar. Då hoppar vi och sätter på musiken med ju.*

Förskolläraren startar musiken och börjar hoppa på två ben. Barnen tittar på henne och hon tar dem i händerna och de dansar/hoppar tillsammans till musiken. Efter en liten stund stänger hon av musiken.

Förskollärare Nu hoppade ni på två ju. Nu ska vi hoppa på fyra. Hur kan man, hur hoppar man när man hoppar på fyra? Har ni något förslag? *Inget barn gör något.* Vi provar att hoppa med händerna. *Sträcker fram båda händerna.*

Barn Händerna. *Barnen sträcker fram sina händer på samma sätt som förskolläraren.*

Förskollärare Händerna också, så blir det så här. *Sätter ner händerna i golvet.* En, två, tre, fyra. *Räknar händer och fötter.* Så här kan man hoppa på fyra. Vi provar hoppa så. *Sätter på musiken.* Då sätter vi igång och hoppar på fyra. Då sätter vi händerna i golvet. *Sätter ner sina händer i golvet.* Får jag se om du kan? *Tittar på ett barn som står bredvid.*

Barnen sätter ner händerna i golvet och tillsammans med förskolläraren hoppar de på fyra till musiken. Förskolläraren sjunger med i musiken som sjunger ”hoppa hoppa” och berömmar barnen med ”bra”.

I excerpt 3 är matematikens form och innehåll inbäddat i lekens innehåll och därmed i lekens form. Förskolläraren visar och pratar om två och fyra samtidigt som barnen får prova att hoppa på två och fyra till musiken. Att ta reda på hur man hoppar på två eller fyra fyller en funktion i relation till lekens struktur men är inte nödvändigt för att delta i leken där barnen kan vara med och leka utan att urskilja matematiken som finns inbäddad i leken.

I excerpt 4 leker en förskollärare och fyra barn *Rockringar*. Barnen är bekanta med lekens form och innehåll. De har lekt en omgång och precis räknat hur många som sitter i varje rockring.

Förskollärare	Nu får ni upp och dansa igen! <i>Barnen ställer sig upp och hoppar.</i> Får jag se om ni kan dansa då? <i>Tidigare har barnen sprungit runt runt i ring medan musiken spelat.</i> Hur gör man när man dansar? Kan ni dansa? Visa mig hur man dansar! <i>Samtidigt som hon dansar flyttar hon en sittplatta så att det ligger fyra sittplattor i den ena rockringen och ingen i den andra. När musiken tystnar säger hon</i> Vad skulle man göra nu?
Barn	Sätta sig!
Förskollärare	Ja, sätta sig på en dyna. <i>Tre barn sätter sig direkt.</i> Kom Eskil ³ och sätt dig här. <i>Visar den lediga sittplattan.</i> Jag hittade en som var ledig här.
Barn	Är det inte lite <i>Trycker med ryggen mot de andra för att få mer plats.</i>
Förskollärare	Så, då ska vi se. Hur många barn är det i den här ringen? <i>Pekar med en cirklande rörelse över den tomma rockringen.</i>
Barn	Ingen
Förskollärare	Ingen, noll! Och hur många är det i den här ringen?

I excerpt 4 är matematikens form och innehåll inbäddat i lekens form och innehåll där både lekens form och innehåll (vad ska man göra nu, hur gör man när man dansar) och matematikens form och innehåll (hur många är det i rockringen) uppmärksammas av förskolläraren och kan därmed urskiljas av barnen. Att ta reda på hur många som sitter i rockringen är dock inte nödvändigt för att delta i leken där barnen kan vara med och leka utan att urskilja matematiken som finns inbäddad i leken.

Gemensamt för observationerna i kategorin *inbäddad matematik där matematiken inte är nödvändig* är att matematikens form och innehåll bäddas in i lekens form och innehåll där leken blir en kontext i betydelsen ”real world” som inkluderar ett matematiskt problem. Däremot framträder inte ett matematiskt problem där matematiken är *nödvändig*

3 Fingerat namn

för den eller dem som ska lära. Därmed kan exemplen i denna kategori utifrån Freudenthal inte heller beskrivas som *matematisera*.

Inbäddad matematik där matematiken är nödvändig

Observationerna i den tredje kategorin skiljer den från de tidigare kategorierna eftersom barnen i leken tycks urskilja ett problem som enligt dem kan lösas ”sett i ljuset av matematik”, det vill säga matematisera så som vi tolkar Freudenthal. I excerpt 5 har leken Stenrock fått en imaginär inramning med krokodiler som barnen måste rädsla sig ifrån. I den inramningen får stenar att stå på en betydelse för lekens genomförande och antalet stenar som matchas med antal kroppsdelar att stå på bäddas in i leken.

Excerpt 5

Förskolläraren har gentemot tidigare i leken tagit bort stenar så det nu ligger stenar i grupper om tre och två på golvet.

Förskollärare Så simmar vi runt. *Ett barn börjar samla in stenarna. Låt dom ligga, stenarna måste rädda oss. Förskolläraren lägger ut stenarna igen. Barnet hoppar på en grupp med tre stenar, tar emot sig med händerna, sätter sig på golvet och pekar på varje sten en gång (tre stenar).*

Förskollärare Nu kommer krokodilerna! *En flicka går runt och ser vilsen ut, tittar på golvet och stenarna. Du kan ställa dig där, jag tog bort några. Flickan ser olycklig ut. Ville du ha det som det var förut? Förskolläraren lägger två stenar till två som redan ligger på golvet, Flickan ställer sig med händer och fötter på dem. En pojke springer och hoppar omkring på golvet. Förskolläraren släpper ner en sten på golvet. Nu får du också ställa dig på stenen. Pojken sätter sig på golvet och stampar en fot på stenen. Förskolläraren vänder sig till flickan igen. Hur många stenar har du, en, två, tre, fyra, fyra stycken, pekräknar barnets händer och fötter, och hur många stenar har du? En sten, jättebra, hjälper pojken att hålla balansen att stå på ett ben och cirklar med handen runt stenen.*

I den imaginära leken får leken och matematiken mening i förhållande till varandra, de är delar i samma helhet, matematikens form och innehåll är inkluderat i lekens innehåll och därmed även i lekens form. Att matematiken är betydelsefull för lekens fortgående syns i barnens ageranden där pojken sätter sig ner för att kunna stampa med bara en fot på stenen och flickan uttrycker att något inte stämmer när det inte är samma antal stenar som tidigare. Antal framträder för barnen som en *nödvändig* del i lekens innehåll och form där barnen med förskollärarens stöd och förklaring till den överraskande förändringen i antal kan de fortsätta delta i leken.

I excerpt 6 leker en förskollärare och sex barn *Rockringar*. De har tre rockringar och sex sittplattor som förskolläraren flyttar mellan rockringarna medan barnen dansar till musiken. Förskolläraren är med och dansar med barnen.

Excerpt 6

- Förskollärare Nu blev det tyst. Vad skulle man göra då?
- Barn Sätta sig.
- Förskollärare Sätta sig på en dyna. Nu ska vi se om det finns någon ledig. *Vänder lite på barnen i rockringen med fyra sittplattor så att den lediga sittplattan ska synas.*
- Barn Jag vill inte sitta där.
- Förskollärare Då får jag sitta där. Då sitter jag här. *Sätter sig på den lediga sittplattan.* Hur många fick vi plats i den här ringen?
- Barn *Barnet som inte sitter i en rockring ler stort och ställer sig upp.* En, två, tre, fyra, fem. *Han räknar barnen genom att säga ett räkneord samtidigt som han går runt och tar ett barn i taget på huvudet.*
- Förskollärare Du räknade alla! Om vi räknar bara här? *Pekar på sig själv och de tre barnen i den ena rockringen.* Fick jag inte sitta här? *Ett barn är bekymrat över att förskolläraren och inte barnet sitter i rockringen.* Jo, en liten stund. Vi räknar hur många som är här.
- Barn En, två, tre, fyra, fem, sex. *Barnet som inte sitter i en rockring räknar igen alla barnen genom att säga ett räkneord samtidigt som han går runt och tar ett barn i taget på huvudet. Ramsan går något fortare än ett-till-ett, därav sex barn.*
- Förskollärare Kom. Nu räknade du alla barnen igen. *Lyfter barnet som räknar och ställer honom mellan rockringarna så han har ryggen mot den rockring som inte ska räknas.* Men om vi bara räknar barnen som är här. En, två, tre, fyra. Fyra stycken här. *Pekräknar barnen och sig själv.*
- Därefter räknar barnet med förskollärarens hjälp barnen i den andra rockringen.



Bild 3. Någon ska sitta på varje sittplatta.

Till lekens ram och innehåll hör att någon ska sitta på varje sittplatta (se bild 3). Ett barn protesterar när förskolläraren sätter sig i rockringen istället för ett av barnen, möjligtvis eftersom förskolläraren inte tidigare deltagit på det sättet varvid barnet har tolkat att sittplattorna är till för barnen som deltar i leken (lekens form). Barnet som protesterar mot att sätta sig på den sista lediga sittplattan uppfattar däremot lekens form på annat sätt där förskollärarens agerande möjliggör för barnet att agera "som förskollärare" och

då blir räknandet en nödvändig del för barnet för att kunna ”leka förskollärare” fullt ut. Matematiken blir därmed nödvändig del av lekens innehåll för barnet.

Gemensamt för observationerna i kategorin *inbäddad matematik där matematiken är nödvändig* är att matematikens form och innehåll bäddas in i lekens form och innehåll där leken blir en kontext i betydelsen ”real world” som inkluderar ett matematiskt problem. I kategorin framträder dessutom matematiken som *nödvändig* för ett eller flera barn som deltar och därmed kan exemplen i denna kategori utifrån vår tolkning av Freudenthal i relation till dessa barn beskrivas som *matematisera*.

Delresultat 2: Vad triggas matematiserande?

Ambitionen i artikeln är att problematisera uttrycket *matematisera* där resultatet visar att det är en utmaning att undervisa om tal på sätt som uppfyller Freudenthals kriterier för matematisera, men också att det *kan* göras. För att barn ska ges möjlighet att matematisera behöver leken utgöra ”real world”, det vill säga matematiken behöver vara inbäddad i lekens form och innehåll. Exempelen ovan visar dock att detta inte är tillräckligt och därmed är en fråga central: Vad triggas matematiserandet? Även om aktiviteterna i studien är designade för att ge barnen bästa möjligheter att utveckla sin taluppfattning inom ramarna för lek, ser vi att förskollärarens intentioner inte alltid faller ut i ett utvecklande samspel kring innebörden av tal som meningsfulla och användbara i aktiviteten. I observationerna som faller inom kategorin *Inbäddad matematik där matematiken är nödvändig* framträder vissa kriterier som gör att observationerna skiljer sig från de två tidigare kategorierna. Analysen visar på tre kriterier som utifrån våra data tycks vara nycklar till matematiserande undervisning med 1–3-åringar.

Agency

I analysen framträder en distinkt skillnad i hur interaktionen mellan förskollärare och barn öppnar upp för eller begränsar barnens initiativ till att undersöka och använda matematik. Detta kan förstås i termer av agency, det vill säga den process av självständighet och initiativ som tillåts i en situation. Ömsesidigheten i denna process framträder i att barn *tar* egna initiativ och använder matematik på sätt som stöttar barnets målsättning med en handling eller riktning i leken. Samtidigt är detta relaterat till hur förskolläraren tillåter, eller *ger*, barnen agency att ta initiativ, till exempel att sätta sig ner för att kunna ”stå på en sten” eller ta rollen som förskollärare när förskolläraren tar rollen som barn. Agency förutsätter samspel där vi kan se att förskollärarens *med-lekande* tycks bidra till denna ömsesidighet. Lekens öppenhet (kontext) och tillfällen där förskolläraren använder den öppenheten som en resurs i undervisningen (tillför relevant och användbar matematik) skapar möjligheten för barn och lärare att tolka och beakta den form och det innehåll som den andra deltagaren bidrar med i samspelet.

Kunskap om lekens struktur

I analysen framträder att möjligheten att matematisera även är relaterad till hur barnet uppfattar strukturen i aktiviteten, det vill säga vad barnen behöver urskilja för att kunna delta självständigt i leken. Form och innehåll framträder här som två användbara begrepp som förskollärarna spontant bygger in i aktiviteten genom att ofta börja med reglerna och hur en viss lek fungerar (formen). Om lekens struktur inte är känd för barnen kan inte heller matematikens form och innehåll bäddas in i lekens innehåll och därmed inte bli nödvändig för att genomföra och utveckla leken. Matematisera inbegriper på så sätt ett mått av självständighet, det vill säga självständighet att agera och pröva egna och andras idéer (se kriteriet agency ovan), men för det behöver barnet ha urskilt tillräckligt av lekens struktur.

Ovanstående resonemang för med sig att lekens struktur, det vill säga vad man kan och får göra inom lekens ramar, hur långt man kan tänja lekramarna utan att tappa innehåll och form, är betydelsefullt för att matematikens form och innehåll ska kunna integreras. Det innebär att lek och matematik inte alltid är möjligt att erfara samtidigt för den nytillkomna deltagaren, utan kan behöva separeras för att därefter kunna hanteras som integrerat. Struktur, som vi till exempel ser som separerad från matematik i den första kategorin beskriven i delresultat 1, kan därför mycket väl vara ett kritiskt innehåll för lärande. Det behöver inte betyda instruktion i en negativ mening utan har i vår studie identifierats i förskollärarnas användning av en lekfull röst, inramning i en simtur med farliga hajar och andra barnorienterade former.

Initial matematisk idé

Ett tredje kriterium som framträder i analysen, men som kommer att behöva ytterligare analyser kopplat till specifika lärandeobjekt, är att barn behöver ha en initial matematisk idé för att kunna delta i horisontell matematiserande undervisning. För att kunna se en situation ”i ljuset av matematik” behöver barnet ha med sig någon initial matematisk idé in i aktiviteten. Om barnen inte har förutsättningarna (tidigare kunskap) att urskilja eller använda matematik, så uppenbarar sig inte matematiken av sig själv i aktiviteten och om barnet inte förmår se en situation i ljuset av matematik kan barnet inte heller veta vilken riktning som är möjlig att ta. Excerpt 6 visar till exempel att ett barn uppfattar matematik som något som kan användas för att delta i leken i den nya rollen, men barnet kan behöva hjälp att hitta lämpliga och utvecklande strategier.

Diskussion och implikationer för praxis

Avsikten med analysen i denna artikel är inte att säga att matematik ska bäddas in i all lek men mot bakgrund av att den svenska förskoleverksamheten enligt svensk lagstiftning ska vila på vetenskaplig grund fann vi ett behov av att problematisera Freudenthals

matematisera. Undervisning är ett etablerat begrepp som skrivits in i den svenska läroplanen för förskolan och därmed förväntas förskolläraren genomföra undervisning som gynnar barns lärande och utveckling, där leken och barns intressen är centrala. I artikeln har vi visat hur utmanande undervisning med ett tydligt lärandeobjekt som är meningsfullt *för barnen* kan vara i förskolan. Observationerna visar att en stor del av aktiviteterna innefattar att förhandla ramar för den aktuella leken där matematiken blir ett parallellt projekt eller en möjlig men inte nödvändig del i leken. Att urskilja och förhandla ramar framstår dock som viktigt för att i senare skede möjliggöra matematiserande. Observationerna visar att matematisering är möjlig i lek förutsatt att tre kriterier uppfylls: agency, i betydelsen att barnen kan ta initiativ, kunskap om lekens struktur som möjliggör för barnen att agera självständigt samt en initial matematisk idé som möjliggör för barnen att se aktiviteten ”i ljuset av matematik”.

Observationerna visar att det inte är tillräckligt att teoretiskt beskriva matematisera som att bygga in matematikens form och innehåll i en aktivitet som barn engagerar sig i. Observationerna visar att matematisera är situerat. Även om en aktivitet är väl designad och teoretiskt bör skapa de bästa förutsättningarna för att integrera matematik i lek där matematiken blir användbar och relevant, är det hur barnet uppfattar lekens och matematikens form och innehåll i stunden som tycks spela roll. Vår analys visar att möjligheterna att matematisera dels är relaterat till designen av en aktivitet i vilken utsträckning utformningen ”bäddar in” matematik, dels att förskolläraren spelar en viktig roll i att bjuda in till deltagande och därmed att barnen tillåts utforska och använda matematik i leken.

Studien visar även att det har betydelse att matematiken är relevant för kontexten ifråga, annars tenderar matematiken att bli separerad från leken. Om lekens struktur inte är känd för barnen kan inte heller matematikens form och innehåll bäddas in i leken och därmed inte bli nödvändig för att genomföra och utveckla leken. Även när leken är initierad av förskolläraren behöver barnen, likt Van Oers (2014) beskrivningar, vara fria att utforska lekens möjliga riktningar. Det tycks som att barnens agency och frihet att ta leken i oförsägbara riktningar påverkas positivt när förskolläraren deltar aktivt i leken. I de observationer där förskolläraren är en aktiv deltagare (till exempel dansar med barnen eller simmar med barnen och krokodilerna och skyndar sig upp på stenarna när krokodilerna kommer) kan vi se att barnen i högre utsträckning tar initiativ och använder matematik självständigt för att delta, initiera nya riktning och utveckla leken. Denna insikt är i linje med Sairanen et al.:s (2020) studie som framhåller betydelsen av den respons förskollärare ger på barns initiativ. Det tycks som om förskollärare framstår som mer jämbördiga lekdeltagare när de deltar i leken än när de styr leken från sidan. När förskolläraren genom aktivt deltagande i leken bjuder in barnen till initiativtagande framträder barns agency i en ömsesidig process.

När förskolläraren deltar i leken värdesätts även lekens form och innehåll lika mycket som matematikens form och innehåll. På samma sätt som förskolläraren utifrån aktiviteternas design utforskar tal med barnen (matematikens form och innehåll) blir även lekens

form och innehåll (till exempel hur man gör när man dansar) möjligt att utforska. När läraren inte deltar aktivt i leken kan vi i flera observationer se hur barnens fokus styrs från lekens form och innehåll (till exempel slutar de dansa och står och väntar tills musiken ska tystna) till att enbart fokusera det som ur deras perspektiv värdesätts av förskolläraren, matematikens form och innehåll. För att matematiken ska bli inbäddad i aktiviteten kan leken därför inte ses enbart som ett medel att integrera matematik i verksamheten, vilket inte heller är i linje med den svenska läroplanen i förskolan som särskilt framhåller möjligheten att vidga barns lekmönster genom planerade lekaktiviteter. Utifrån den analys vi presenterat kan vi dock dra slutsatsen att det är möjligt att undervisa matematiserande så att matematik blir en relevant och användbar del av barns lek utan att lekens ursprungliga värden förringas, utan snarare vidgas och fördjupas. På så vis kan matematisera fortsatt användas i förskoledidaktiska diskussioner, men vårt bidrag är en problematisering och nyansering som vilar på vetenskaplig grund och empiriska fynd.

Författarbiografi

Camilla Björklund är professor i pedagogik vid Institutionen för pedagogik, kommunikation och lärande vid Göteborgs universitet. Forskningsintresset rör sig kring barns matematiklärande och undervisning i förskola, förskoleklass och tidiga skolår, särskilt taluppfattning och tidiga aritmetikfärdigheter. Forskningen är praktknära och genomförs ofta i nära samarbete med förskollärare och lärare i syfte att utveckla undervisningspraktiker och -principer med ett innehållsorienterad och teoridrivet fokus.

Hanna Palmér är professor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hennes forskningsintresse är yngre barns lärande i matematik och matematikundervisning i förskola och förskoleklass. De senaste forskningsprojekten har fokuserat problemlösning som utgångspunkt för förskoleklassens matematikundervisning, toddlares utveckling av taluppfattning samt matematikundervisning med digitala verktyg och programmering i förskola och förskoleklass.

Referenser

- Björklund, C., Magnusson, M. & Palmér, H. (2018). Teachers' involvement in children's mathematizing – beyond dichotomization between play and teaching. *European Early Childhood Education Research Journal*, 26(4), 469–480. <https://doi.org/10.1080/1350293X.2018.1487162>
- Björklund, C. & Palmér, H. (2019). I mötet mellan lekens frihet och undervisningens målorientering i förskolan. *Forskning om undervisning och lärande*, 7(1), 64–85.

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*, 1(1), 3–8.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education*. Reidel Publishing.
- Freudenthal, H. (1981). Problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 133–150.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777–796.
- James, A. (2009). Agency. I J. Qvortrup, W. Corsaro & M. Honig (Red.), *The Palgrave handbook of childhood studies* (ss. 34–45). Palgrave Macmillan.
- Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, personality*. Prentice-Hall.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 235–264.
- Lipponen, L. & Kumpulainen, K. (2011). Acting as accountable authors: creating interactional spaces for agency work in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 27(5), 812–819.
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.
- Palmér, H. & Björklund, C. (2019). Toddlers exploring structural elements in play. I U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME11, February 6 – 10, 2019). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Pramling, N., Wallerstedt, C., Lagerlöf, P., Björklund, C., Kultti, A., Palmér, H., Magnusson, M., Thulin, S., Jonsson, A. & Pramling Samuelsson, I. (2019). *Play-responsive teaching in early childhood education*. Springer.
- Pramling Samuelsson, I. & Asplund Carlsson, M. (2008). The playing learning child: Towards a pedagogy of early childhood. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 52(6), 623–641.
- Sairanen, H., Kumpulainen, K. & Kajamaa, A. (2020). An investigation into children's agency: Children's initiatives and practitioners' responses in Finnish early childhood education. *Early Child Development and Care*, 1–12. <https://doi.org/10.1080/03004430.2020.1739030>
- Skolverket. (2018). *Läroplan för förskolan lpfö18*. Skolverket.
- Sommer, D., Pramling Samuelsson, I. & Hundeide, K. (2010). *Child perspectives and children's perspectives in theory and practice*. Springer.

- van Oers, B. (2003). Learning resources in the context of play. Promoting effective learning in early childhood. *European Early Childhood Education Research Journal*, 11(1), 7–26.
- van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 23–37. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9225-x>
- van Oers, B. (2014). Cultural-historical perspectives on play: Central ideas. I L. Brooker, M. Blaise & S. Edwards (Red.), *The Sage handbook of play and learning in early childhood* (ss. 56–66). Sage.
- Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed*. Vetenskapsrådet.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher mental processes*. Harvard University Press.